

Roll No.

R
680

Annual Examination, 2016

B. Sc. III

MATHEMATICS

Paper I

[Analysis]

TIME — 3 Hours)

(M. M. — 50

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

NOTE : Attempt five questions in all. Do any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—I
Unit— I

1. (अ) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2}$$

P. T. O.

(2)

Test the convergence of the following series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2}.$$

(ब) किसी फलन के लिए यंग प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Young's theorem for any function.

(स) अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए—

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Find the Fourier series in the interval $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

इकाई—II
Unit—II

2. (अ) मान लीजिए $f \in R [a, b]$ तथा m तथा M , f के $[a, b]$ पर निम्न एवं उच्च परिवन्ध हैं, तब दर्शाइए कि—

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \text{ यदि } b \geq a.$$

R
680

(3)

Let $f \in R [a, b]$ and m and M are lower and upper bounds of function f in $[a, b]$, then show that :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \text{ if } b \geq a.$$

(ब) समाकल $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^n}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए, जब $a > 0$.

Test the convergence of integral $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^n}$, when $a > 0$.

(स) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से $\int_a^{\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{xe^x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\alpha > -1$.

Find the value of the integral $\int_a^{\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{xe^x} dx$, with the help of differentiation with respect to parameter, $\alpha > -1$.

इकाई—III
Unit—III

3. (अ) दर्शाइए कि फलन $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ हार्मोनिक है और संगत विश्लेषिक फलन $u + iv$ को ज्ञात कीजिए।

R
680

P. T. O.

(4)

Show that the function $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ is harmonic and find the corresponding analytic function $u + iv$.

- (ब) दर्शाइये कि द्विरेखिक रूपान्तरण $w = \frac{5-4z}{4z-2}$, वृत्त $|z|=1$ को w -समतल में इकाई वृत्त में रूपान्तरित करता है। इस वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

Show that the bilinear transformation $w = \frac{5-4z}{4z-2}$ transform the circle $|z|=1$ into a unit circle in the w -plane. Find centre of that circle.

- (स) यदि समीकरण $w = \sin^{-1} z$ का अर्थ $z = \sin w$ हो तो दर्शाइये कि $\sin^{-1} z$ के सभी मान $\sin^{-1} z = -i \log [iz + (1-z^2)^{1/2}]$ से दिये जाते हैं।

If the equation $w = \sin^{-1} z$ has the sense that $z = \sin w$, then show that all the values of $\sin^{-1} z$ is given by, $\sin^{-1} z = -i \log [iz + (1-z^2)^{1/2}]$.

इकाई—IV
Unit—IV

4. (अ) मान लीजिए (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा d_1 इस प्रकार परिभाषित है कि

R
680

(5)

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X.$$

सिद्ध कीजिए कि d_1, X पर एक दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space and d_1 be defined by

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X.$$

Prove that d_1 is a metric on X .

- (ब) वास्तविक संख्याओं के लिए सघनता प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove density theorem for real numbers.

- (स) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक कौशो अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that every Cauchy sequence in a metric space is bounded.

इकाई—V
Unit—V

5. (अ) दर्शाइये कि समष्टि $c[a, b]$ गणनीय सघन है।

Show that the space $c[a, b]$ is separable.

R
680

P. T. O.

(6)

(ब) सिद्ध कीजिए कि एक संहत दूरीक समष्टि बोल्जानो-वाइस्ट्राइस गुणधर्म (BWP) रखता है।

Prove that a compact metric space has Bolzano-Weierstrass Property (BWP).

(स) मान लीजिए (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A \subseteq X$ है। यदि A संबद्ध, विवृत और संवृत है तब सिद्ध कीजिए A, X का एक संबद्ध घटक है।

Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$. If A is connected, open and closed, then prove that A, X is a component of X .

xxxxxx bxxxxxx