Roll No. .....

R
651

Annual Examination, 2016

B. Sc. II

MATHEMATICS

Paper I

[Advanced Calculus]

TIME – 3 Hours) (M. M. – 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक के कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

NOTE : *All questions are compulsory. Attempt any two parts from each questions. All questions carry equal marks.*

इकाई—I
Unit— I

1. (अ) सिद्ध कीजिए यदि किसी अनुक्रम की सीमा का अस्तित्व है तो वह अद्वितीय होती है।

Prove that if the limit of a sequence exists, then it is unique.

P. T. O.

(ब) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$.

(स) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots$$

Test for convergence and absolute convergence of the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots$$

इकाई—II

Unit— II

2. (अ) निम्नलिखित फलन सांतत्य की जाँच $x = 0$ पर कीजिए—

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0. \end{cases}$$

Test the following function for continuity at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0. \end{cases}$$

(ब) दर्शाइये कि फलन f जो $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित है अन्तराल $[-2, 2]$ में एक समान संतत है।

Show that the function F defined by $f(x) = x^3$ is uniformly continuous in $[-2, 2]$.

(स) फलन $f(x) = x^3 - 6x + 8$ के लिए अन्तराल $[2, 4]$ में रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Rolle's theorem in the interval $[2,4]$ for the function $f(x) = x^3 - 6x + 8$.

इकाई—III

Unit— III

3. (अ) सीमा की परिभाषा का उपयोग करके सिद्ध कीजिए—

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x+2y) = 7.$$

Prove, by definition of limit, that :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x+2y) = 7.$$

(ब) यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ तो सिद्ध करो—

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

If $u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

(स) समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का रूपान्तरण $x = \frac{1}{z}$ रखकर कीजिए।

Transform the equation $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ by substituting $x = \frac{1}{z}$.

इकाई—IV

Unit— IV

4. (अ) सरल रेखाओं के कुल $x \cos\alpha + y \sin\alpha = l \sin\alpha \cos\alpha$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है।

Find the envelope of the family of straight lines $x \cos\alpha + y \sin\alpha = l \sin\alpha \cos\alpha$ when α is the parameter.

(ब) फलन $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2$ के उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ और पल्याण बिन्दु की विवेचना कीजिए।

Discuss the maximum or minimum values or saddle points of the function $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2$.

(स) परवलय $y^2 = 4ax$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the evaluate of the parabola $y^2 = 4ax$.

इकाई—V

Unit— V

5. (अ) सिद्ध कीजिए—

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma m \cdot \Gamma n}{\Gamma m + n} \quad (m, n > 0).$$

Prove that :

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma m \cdot \Gamma n}{\Gamma m + n} \quad (m, n > 0).$$

(ब) मूल्यांकन कीजिए—

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}.$$

Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}.$$

(स) दर्शाइये कि—

$$\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} dxdy = \int_0^{4a} \int_{y^2/4a}^{2\sqrt{ay}} dy\,dx.$$

Show that :

$$\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} dxdy = \int_0^{4a} \int_{y^2/4a}^{2\sqrt{ay}} dy\,dx.$$

× × × × × × b × × × × × ×